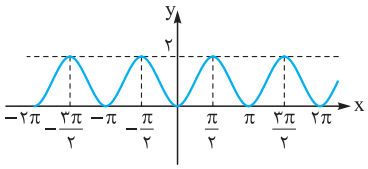
۳ آزمون	ریاضی (۳)	پایهٔ دوازدهم ـ رشته: علوم تجربی	خیلی سبز!
	◀ فصل ۲: مثلثات (آزمون جامع ۱) ▶	مـدت آزمـون: ۶۰ دقیقه	

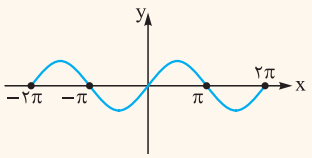
ردیف		نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) برد تابع $f(x)=\tan(x)$ برابر بازهٔ $[-1,1]$ است. ب) صفرهای تابع $y=\sin x$ نقاط تقاطع نمودار تابع ثابت $y=0$ و نمودار تابع $y=\sin x$ هستند. ج) در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی، تغییرات مقادیر تانژانت کاهشی است. د) در بازهٔ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ مقدار تابع $\tan\alpha$ بیشتر از مقدار تابع $\sin\alpha$ است.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. الف) تابع تانژانت در تمام دامنه‌اش ..... است. (یکنوا ـ غیریکنوا) ب) دورهٔ تناوب تابع $y=3-\sin(\pi x-1)$ برابر ..... است. ج) جواب معادلهٔ $\cos^2 x-\sin^2 x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ که در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$ قرار دارد، برابر با ..... است.	۰/۷۵
۳	دورهٔ تناوب و مقادیر min و max تابع $f(x)=2\cos(3\pi x)-1$ را به دست آورید.	۰/۷۵
۴	مثلثی با مساحت $2\sqrt{3}$ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازهٔ دو ضلع این مثلث به ترتیب ۴ و ۲ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟ چرا؟	۱/۲۵
۵	نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطهٔ $y=a\cos bx+c$ است. با توجه به نمودار، مقادیر a، b و c را به دست آورید. *این سبک سؤال، خیلی معروفه و زیاد در امتحانات مطرح می‌شه. برای حل این‌گونه سؤالات، شما باید هم از مفهوم دورهٔ تناوب استفاده کنید و هم خواص توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ رو بلد باشین.* 	۱
۶	تابع $y=\tan x$ مفروض است. نمودار این تابع را در بازهٔ $[0,3\pi]$ رسم کنید.	۱
۷	معادلهٔ مثلثاتی مقابل را حل کنید. $\cos x(2\cos x+5)=3$	۱/۵
۸	مقادیر $\cos 15^\circ$ و $\sin 15^\circ$ را محاسبه کنید. *(مثال کتاب درسی و امتحان نهایی)*	۱/۵
۹	معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید. $\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{\sqrt{2}}{4}=0$	۱/۲۵
	موفق باشید	جمع نمرات ۱۰

آزمون شمارهٔ ۳ (فصل دوم: جامع ۱)

۱ الف) نادرست (۰/۲۵) برد تابع تانژانت برابر با $\mathbb{R}$ است.

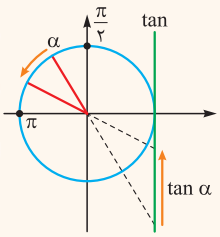
ب) درست (۰/۲۵)

صفرهای، تابع $\sin x$ جواب‌های معادلهٔ $\sin x = 0$ هستند.
به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به صورت $\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y = 0$ یعنی محور xها با تابع $y = \sin x$ است.



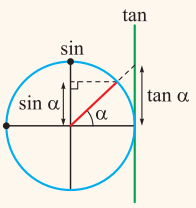
ج) نادرست (۰/۲۵)

در ربع دوم زاویهٔ α از $\frac{\pi}{2}$ تا π افزایش پیدا می‌کند. در $\alpha = \frac{\pi}{2}$ خط گذرنده از مبدأ محور تانژانت را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند، اما اگر α از $\frac{\pi}{2}$ تا π به تدریج افزایش پیدا کند، مقدار $\tan\alpha$ از $-\infty$ شروع به افزایش می‌کند.
در نهایت می‌توان گفت $\tan\alpha$ در ربع دوم از $-\infty$ تا صفر افزایش پیدا می‌کند.



د) درست (۰/۲۵)

کافی است یک دایرهٔ مثلثاتی و یک زاویهٔ دلخواه در ربع اول رسم کرده، مقادیر سینوس و تانژانت آن را مشخص کرده و با هم مقایسه کنیم:
واضح است که: $\tan\alpha > \sin\alpha$



۲ الف) غیریکنوا (۰/۲۵)

$y = -\sin(\pi x - 1) + 3 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|\pi|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

ب) ۲ (۰/۲۵)

ج) $\frac{\pi}{12}$ (۰/۲۵)

$$\underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{\cos 2x} = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{6}} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$\xrightarrow{\div 2} x = k\pi \pm \frac{\pi}{12} \xrightarrow{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} x = \frac{\pi}{12}$$

۳

نکته

در تابع $f(x) = a\cos(bx) + c$ مقادیر min، max و دورهٔ تناوب برابرند با:

$$\begin{cases} \max = |a| + c \\ \min = -|a| + c \\ T = \frac{2\pi}{|b|} \end{cases}$$

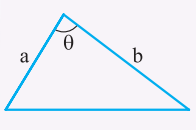
$\max = |2| - 1 = 1$ (۰/۲۵) $\qquad \min = -|2| - 1 = -3$ (۰/۲۵)

$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|3\pi|} = \frac{2}{3}$ (۰/۲۵)

۴

نکته

اگر دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها از مثلثی معلوم باشد، مساحت مثلث را می‌توانیم از رابطهٔ زیر به دست آوریم:



$\Rightarrow S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$

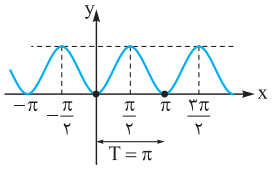
با توجه به اطلاعات مسئله، می‌توانیم بنویسیم:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta \Rightarrow 2\sqrt{3} = (\frac{1}{2})(4)(2)\sin\theta$$ (۰/۲۵)

$$\Rightarrow 4\sin\theta = 2\sqrt{3} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \begin{cases} \theta = 60^\circ \\ \theta = 120^\circ \end{cases}$ (۰/۲۵)

پس ۲ مثلث می‌توان با خاصیت‌های ذکرشده، ساخت. (۰/۲۵)

۵ با توجه به نمودار داریم:



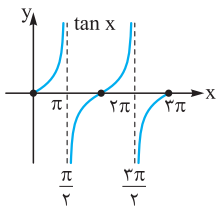
$$\begin{cases} \max = 2 \\ \min = 0 \\ T = \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = \frac{\max + \min}{2} \Rightarrow c = \frac{2+0}{2} = 1 \text{ (۰/۲۵)} \\ |a| = \frac{\max - \min}{2} \Rightarrow |a| = \frac{2-0}{2} = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \text{ (۰/۲۵)} \\ T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2 \text{ (۰/۲۵)} \end{cases}$$

طبق نمودار $f(0) = 0$ است؛ پس با فرض $c = 1$ داریم:

$f(x) = a\cos x + 1 \Rightarrow 0 = a \times 1 + 1 \Rightarrow a = -1$ (۰/۲۵)

۶



(رسم نمودار (۱) نمره)

۷ $\cos x(2\cos x + 5) = 3 \Rightarrow 2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$ (۰/۲۵)

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(2)(-3) = 25 + 24 = 49$

$$\cos x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm 7}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \checkmark \\ \cos x = -3 \times \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ (۰/۲۵)} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \text{ (۰/۲۵)} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

۸ $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ (۰/۲۵)

$\xrightarrow{\alpha = 15^\circ} \cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2(15^\circ)$ (۰/۲۵)

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2(15^\circ) \Rightarrow 2\sin^2(15^\circ) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \xrightarrow{\text{جذر}} \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$ (۰/۲۵)

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos(30^\circ) = 2\cos^2(15^\circ) - 1$ (۰/۲۵)

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 2\cos^2(15^\circ) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}+2}{2} = 2\cos^2(15^\circ)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}+2}{4} = \cos^2(15^\circ)$$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{\text{جذر}} \cos(15^\circ) = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$ (۰/۲۵)

۹ $\frac{1}{2}\sin 3x - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\xrightarrow{\text{طرفین معادله را در ۲ ضرب می‌کنیم.}} \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin\frac{\pi}{4}$$ (۰/۲۵)

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \text{ (۰/۵)} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = (\frac{2k+1}{3})\pi - \frac{\pi}{12} \text{ (۰/۵)} \end{cases}$$